Предмет	*Класс*	*Дата*	*Время начала*	*Время окончания*
Информатика и ИКТ	*9-11*	*01.12.2022*		

Рекомендации к решению задач

Задача 1. Бесконечная игра

Рассмотрим немного измененную постановку задачи: заданы стартовая позиция, стартовое направление робота и нужно определить, сможет ли робот достичь некоторую целевую клетку (при некоторых выборах нового направления в момент столкновения с препятствием).

Для решения построим граф на $4 \cdot N \cdot M$ вершинах, где вершиной будет тройка (r, c, d), где r, c — координаты робота, d — текущее направление его движения. Рёбра в этом графе будут вести из текущего состояния робота в то, в которое он может перейти (с изменённым d в случае столкновения с препятствием, или с измененными координатами в случае перемещения).

Тогда можно запустить обход в глубину или в ширину от стартового состояния и проверить, достижимо ли одно из 4 состояний, соответствующих целевой клетке. Сложность такого решения O(NM) операций.

Нетрудно заметить, что это решение обобщается на случай нескольких конечных клеток и работает за O($NM + Q$).

Наконец, для сведения к исходной задаче заметим, что, из условия на неограниченность времени игры в исходной задаче следует неограниченность количества перезапусков робота из стартовой позиции, а значит, робот когда-нибудь пройдёт по найденному маршруту, выбрав правильные повороты, и посетит клетку.

Задача 2. Друзья в пиццерии

Для решения первой подзадачи достаточно перебрать все пары чисел a и b, третье число вычисляем как $c = A - a - b$. Проверяем что a, b, с — простые. Для заданного числа a, перебираем все варианты числа b только в случае, если a – простое.

Для решения задачи на полный балл составим список простых чисел от 1 до A, воспользовавшись Решетом Эратосфена. Далее перебираем все пары чисел a и b из этого списка, уже без необходимости проверять каждое из них на простоту. Третье число вычисляем как $c = A - a - b$, если оно простое, тройка чисел a, b, c — ответ.

Также можно заметить, что по тернарной проблеме Гольдбаха ответ существует для всех $A \geq 6$, и не существует для остальных.

Задача 3. И всё же, я тебя увижу обязательно

Во время записи входного массива сохраняем позицию первой найденной единицы.

Если единиц не нашли, то, очевидно, выпуклого многоугольника на картинке нет. Иначе совершаем последовательный обход по единицам вправо или вправо-вниз, в зависимости от расположения единиц, затем, если пошли вправо, то идём вправо-вниз или вниз, а если вправо-вниз, то идём вниз или влево-вниз и так далее.

После завершения обхода проверяем, смогли ли мы вернуться в исходную точку, и проверяем, что размер многоугольника по каждой из координат не менее трёх (иначе это будет не выпуклый многоугольник по определению).

Если что-то из этого не выполнено, то, очевидно, выпуклый многоугольник не получился. Иначе, обход был совершён, и мы получили выпуклый многоугольник.

Задача 4. В поисках четвертой задачи

Предположим, что мы хотим из точки (x, y) попасть в точку (x_0, y_0) на периметре подвала. Какое минимальное количество стен нужно для этого нужно сломать?

Соединим точки (x, y) и (x_0, y_0) отрезком и посчитаем, сколько внутренних стен подвала пересекают данный отрезок. Заметим, что это количество и есть ответ на вопрос.

Каждая внутренняя стена, пересекающая заданный отрезок, разделяет плоскость на две части таким образом, что точки (x, y) и (x_0, y_0) окажутся в разных частях плоскости. Чтобы добраться из (x, y) в (x_0, y_0) мы обязаны пересечь разделяющую прямую (внутреннюю стену). Также заметим, что по условию задачи мы не можем пересекать внутренние стены в их точках пересечения друг с другом. Данный факт запрещает нам пересечь две прямые за один раз (в точке их пересечения). Таким образом, ответом на вопрос является количество прямых, пересекающих отрезок, соединяющий точки (x, y) и (x_0, y_0) .

Теперь, когда мы умеем считать ответ для произвольной точки (x_0, y_0), необходимо просто перебрать все возможные такие точки, посчитать для них ответ и взять минимум.

Какие точки (x_0, y_0) необходимо рассматривать? Пусть, на нижней внешней стене подвала лежит t начал и/или концов внутренних стен. Таким образом, t точек разобьют отрезок не более чем t+1 отрезков. Из каждого отрезка разбиения достаточно взять по одной точке и посчитать для нее ответ.

Сложность данного решения: всего нам необходимо рассмотреть порядка $2k$ точек на периметре подвала. Для каждой такой точки перебираем все внутренние стены и проверяем на пересечение с отрезком (x, y) и (x_0, y_0). В результате получаем сложность $O(k^2)$. Такого подхода достаточно для решения всех подгрупп, кроме пятой на языке C++. Python'a будет не достаточно для решения подгрупп 3 и 4.

Улучшим данный алгоритм. Возьмем произвольную стену периметра, пусть на ней лежит t уникальных начал и/или концов внутренних стен, добавим к ним еще две точки начало и конец стены периметра. Отсортируем получившийся набор точек, и получим последовательность точек вида (пример для нижней стены): (0, 0), (x_1, 0), ... , (x_t, 0), (n, 0).

Посчитаем ответ для отрезка (0, 0), (x_j, 0) описанным ранее способом. Далее по порядку рассматриваем оставшиеся отрезки: пусть с ответ для отрезка i, посчитаем ответ для отрезка i+1. Для этого необходимо прибавить к c количество внутренних стен, заканчивающихся / начинающихся в точке (x_j, 0) и пересекающих отрезок ((x_i+x_{i+1}) /2, 0), (x, y)) и отнять те, которые его не пересекают и заканчиваются / начинаются в той же точке.