Задача 1. Автобусные маршруты

Перенумеруем остановки от 1 до N, конечная остановка с одной стороны маршрута будет с номером 0, с другой стороны — с номером $N+1$. И для удобства расщепим каждую конечную остановку на две, с одной и второй стороны дороги. К номерам остановок на одной стороне дороги припишем букву a, к остановкам с другой стороны — букву b. Автобус будет двигаться от остановки $0a$ к остановке $1a$ и так далее по маршруту до остновки Na, и далее на конечную $(N+1)a$. Потом автобус "едет"на остановку $(N+1)b$, время этой поездки и будет необходимым отдыхом водителя. На конечной $(N+1)b$ автобус может стоять, пока диспетчер не скажет ему выезжать на маршрут. Тогда автобус возвращается к остановке 0, от $(N+1)b$ к Nb, далее к $1b$ и $0b$. После переезда на $0a$ автобус опять ждет команды для отправки на новый круг.

Рассмотрим решение на примере $N=4$. Список остановок, с которых будут отъезжать автобусы на следующую по маршруту остановку, обозначем как Ti, списки резервных автобусов — Ri. Рассмотрим расстановку автобусов в начальный момент, когда Петя садится на автобус на конечной $0a$

Автобус выезжает с $0a$ на $1a$, значит, в это же время, на остановке $2b$ должен быть автобус. И, по условию задачи, на $2a$ тоже есть автобус. И, когда автобус с $2a$ приедет на $3a$, на $3b$ тоже будет автобус. То есть в начальный момент должны быть автобусы на $4a$ и $4b$.

Итак, в начальный момент предварительный список остановок, на которых есть автобусы, выглядит так:$T0 = (0a, 2b, 2a, 4b, 4a)$.

Рассмотрим движения этих пяти автобусов дальше, в моменты после первого и второго переездов. После переза на следующие остановки,получим такие предварительные списки
$T1 = (1a, 1b, 3a, 3b, 5a)$,
$T2 = (2a, 0b, 4a, 2b)$ и список резервных автобусов $R2 = (5b)$.

Видим, что для $4a$ нет парного автобуса на $4b$. Значит, для начального момента добавим автобус в список резервных автобусов $R0 = (5b)$. Автобус с $5b$ поедет во второй переезд, и тогда $T2 = (2a, 0b, 4a, 2b, 4b)$ и $R2 = (5b)$.

Делаем следующий переезд.
$T3 = (3a, 5a, 1b, 3b)$ и $R3 = (0a, 5b)$. Видим, нет парного для $1b$, то есть в резерве $R0$ и $R1$ еще нужен $0a$, который перед вторым переездом уже получит команду и будет в списке основных автобусов $T2$. Тогда $T3 = (1a, 3a, 5a, 1b, 3b)$ и $R3 = (0a, 5b)$.

Соберем всю информацию о резервных автобусов в предыдущие моменты и получаем
$T0 = (0a, 2b, 2a, 4b, 4a)$ и $R0 = (0a, 5b)$,
$T1 = (1a, 1b, 3a, 3b, 5a, 5b)$ и $R1 = (0a)$
$T2 = (2a, 0b, 4a, 2b, 4b, 0a)$ и $R2 = (5b)$
$T3 = (3a, 5a, 1b, 3b, 1a, 5b)$ и $R3 = (0a)$.

Также как и для случая с $4a$ в $T2$, $5b$ переместился из $R2$ в $T3$, а не остался дальше в резерве $R3$.

То есть, расположение автобусов на остановках и в резерве повторилось в $T1$ и $T3$, и в дальнейшем всё пойдет по циклу, и новых автобусов в резерв добавлять уже не надо. Для $N=4$ нужно семь автобусов. Кроме начальной расстановки $N+1$ автобусов нужен резерв в два автобуса из-за отдыха водителей на конечных остановках.

Задача 2. Шахматная доска

Предположим, что королю не мешают границы доски сделать два хода в любой возможной комбинации. Тогда количество закрашенных клеток равно 16, так как будет закрашено квадратное поле 4 на 4.

Для коня максимальное количество закрашенных клеток равно 41. Заметим, что на квадратной доске с чётным N, слон всегда закрасит ровно половину клеток, а если N — нечётное, то если сумма номеров столбца и строки — нечётное число, то будет $(N^2+1)/2$ закрашенных клеток; для чётной суммы номеров столбца и строки закрашенных слоном клеток будет $(N^2-1)/2$.

Задача 3. Цитирование

Поместим информацию о количестве цитирований каждой записи Петра в массив с именем A. Предполагается, что нумерация массива начинается с 1. Если i — номер записи в блоге, то $A[i]$ — количество цитирований данной записи.

Первый способ — сортировка. Отсортируем этот массив по невозрастанию любым способом.

Далее идем от начала массива (от больших значений к меньшим). Пока индекс массива меньше значения в соответствующей ячейке массива, переходим к следующему элементу.

Предположим, что мы остановились на элементе с индексом i в массиве A:

- если $A[i]=i$, то i – индекс Хирша;
- если $A[i]<i$, то индекс Хирша равен $i-1$.

Второй способ — полный перебор. Для каждого значения в массиве A посчитаем количество элементов, больших либо равных ему.

В примере входных данных в условии задачи для 9 — это 2, для 7 — 3, для 1 — 9, для 6 — 4, а для 5 — 6.

Очевидно, что индекс Хирша для данного примера равен 5 — выше индекс быть не может, т.к. не меньше 6 раз было процитировано всего 4 записи, что не соответствует определению индекса Хирша.

Задача 4. Дизайн для кухни

Предмет будет пересекаться со сторонами треугольника, либо если треугольник полностью лежит внутри прямоугольника, либо при пересечении стороны прямоугольнка со стороной треугольника, либо сторона треугольника проходит внутри прямоугольнка.

I. Для проверки, лежит ли треугольник полностью внутри прямоугольника, нужно проверить, что все три вершины треугольника лежат внутри. Для этого проверяем в каких границах лежат абсциссы и ординаты вершин.

   Если треугольник оказывается внутри рассматриваемого прямоугольника, то выводим на новой строке "YES"и переходим к следующему прямоугольнику.

II. Проверим каждую сторону прямоугольника на пересечение со всеми сторонами треугольника. Обозначим сторону треугольника AB, сторону прямоугольника — PQ.

1. Если AB параллельна одной из осей координат, а PQ — другой оси, то проверяем, пересекаются ли отрезки.
2. В другом случае, если AB не параллельна ни одной из осей координат, рассмотрим уравнение прямой, на которой лежит AB, $y = k \cdot x + c$. Получаем систему уравнений с двумя неизвестными:
   $y_A = k \cdot x_A + c$
   $y_B = k \cdot x_B + c$.
   Находим k, c. Находим точку пересечения прямых. Для этого надо вспомнить, что что для вершин P и Q, либо абсциссы, либо ординаты равны. Если точка пересечения лежит на стороне прямоугольника и не совпадает с P и Q, то выводим на новой строке "YES"и переходим к следующему прямоугольнику.

III. Если не получили ответ "YES"по пунктам I и II, то это означает, что либо сторона треугольника проходит внутри прямоугольнка через его вершины, либо пересечения предмета со сторонами треугольника нет.

Если сторона треугольника проходит внутри прямоугольнка через его вершины, то одна из диагоналей прямогульника (и точка пересечения диагоналей) лежит на стороне треугольника.