Задача 1. Цитирование

Поместим информацию о количестве цитирований каждой записи Петра в массив с именем A. Предполагается, что нумерация массива начинается с 1. Если i — номер записи в блоге, то $A[i]$ — количество цитирований данной записи.

Первый способ – сортировка. Отсортируем этот массив по невозрастанию любым способом.

Далее идем от начала массива (от больших значений к меньшим). Пока индекс массива меньше значения в соответствующей ячейке массива, переходим к следующему элементу.

Предположим, что мы остановились на элементе с индексом i в массиве A:

- если $A[i] = i$, то i – индекс Хирша;
- если $A[i] < i$, то индекс Хирша равен $i - 1$.

Второй способ — полный перебор. Для каждого значения в массиве A посчитаем количество элементов, больших либо равных ему.

В примере входных данных в условии задачи для 9 — это 2, для 7 — 3, для 1 — 9, для 6 — 4, а для 5 — 6.

Очевидно, что индекс Хирша для данного примера равен 5 — выше индекс быть не может, т.к. не меньше 6 раз было процитировано всего 4 записи, что не соответствует определению индекса Хирша.

Задача 2. Фонтаны

Пусть h — высота центрального фонтанчика. Попробуем вывести формулу для $S(h, n)$ — суммы высот всех фонтанчиков, которая зависит от высоты центрального фонтанчика и длины стороны фонтана.

Для начала можно заметить, что $S(h, n) = h + 4 \cdot 2(h-1) + 4 \cdot 4(h-2) + \ldots + 4 \cdot (n-1)\left(h - \frac{n-1}{2}\right) =$

$$= h + 4\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2i(h-i) = h + 8\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i(h-i) = h + 8h\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i - 8\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^2.$$

Пусть $k = \frac{n-1}{2}$.

Известно, что $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Отсюда $S(h, n) = h + 8h\sum_{i=1}^{k} i - 8\sum_{i=1}^{k} i^2 = h + 8h\frac{k(k+1)}{2} - 8\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Подставив обратно $\frac{n-1}{2}$ вместо k получаем $S(h, n) = h + h(n-1)(n+1) - \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

После приведения к общему знаменателю и раскрытия скобок получаем
$S(h, n) = \frac{3hn^2 - n^3 + n}{3}$.

По условию $\dfrac{3hn^2 - n^3 + n}{3} \leqslant m$. Отсюда $h \leqslant \dfrac{3m + n^3 - n}{3n^2}$.

То есть $h_{max} = \left\lfloor \dfrac{3m + n^3 - n}{3n^2} \right\rfloor$.

Осталось проверить, что при $h = h_{max}$ высота всех фонтанчиков будет больше нуля. Для этого должно выполняться условие: $h_{max} \geqslant \dfrac{n+1}{2}$. Если данное условие не выполнено, то ответ «Impossible».

Еще одно замечание. При подсчете h_{max} у нас появляется слагаемое n^3. По условию задачи n может достигать значения $10^9 - 1$. В таком случае значение n^3 не поместится в long long. Можно было воспользоваться длинной арифметикой (которая встроена в языки Python и Java), а можно было заметить, что $\dfrac{n+1}{2} \leqslant h \leqslant \dfrac{3m + n^3 - n}{3n^2} \Rightarrow \dfrac{n+1}{2} \leqslant \dfrac{3m + n^3 - n}{3n^2} \Rightarrow n^3 + 3n^2 + 2n \leqslant 6m \leqslant 6 \cdot 10^{18}$. Сделав оценку сверху, получим, что $n^3 \leqslant 6 \cdot 10^{18}$, то есть n^3 поместится в long long, если мы сразу будем отбрасывать те значения n, которые нам никогда не подойдут. Например, при $n \geqslant 2 \cdot 10^6 = \sqrt[3]{8 \cdot 10^{18}}$ можно было сразу выводить «Impossible» и обрабатывать только те случаи, когда $n < 2 \cdot 10^6$.

Также можно было решать задачу, используя бинарный поиск.

Задача 3. Дизайн для кухни

Прямоугольник. Прямоугольный предмет будет пересекаться с треугольником, если:
1) либо треугольник полностью лежит внутри прямоугольника,
2) либо прямоугольник полностью или частично лежит внутри треугольника,
3) либо при пересечении стороны прямоугольнка со стороной треугольника.

Обозначим треугольник ABC, прямоугольник — $PQRS$, точку пересечения диагоналей — D.

I. Для проверки, лежит ли ABC полностью внутри прямоугольника $PQRS$, нужно проверить, что хотя бы одна из вершины треугольника лежат внутри или все три — на сторонах $PQRS$. Для этого проверяем в каких границах лежат абсциссы и ординаты вершин.

   Если треугольник оказывается внутри рассматриваемого прямоугольника, то выводим на новой строке "YES"и переходим к следующему предмету.

II. Для проверки, лежит ли $PQRS$ полностью или частично внутри треугольника ABC, нужно проверить, что лежат ли вершины $PQRS$ и D внутри ABC.

   Если хотя бы часть проверяемых точек находится внутри или на сторонах ABC лежит больше двух рассматриваемых точек, выводим на новой строке "YES"и переходим к следующему предмету.

III. Проверим каждую сторону прямоугольника на пересечение со всеми сторонами треугольника. Рассмотрим стороны AB и PQ.

1. Если AB параллельна одной из осей координат, а PQ — другой оси, то проверяем, пересекаются ли отрезки.
2. В другом случае рассмотрим уравнение прямой, на которой лежит AB, $y = k \cdot x + c$. Получаем систему уравнений с двумя неизвестными:
   $y_A = k \cdot x_A + c$
   $y_B = k \cdot x_B + c.$

   Находим k, c. Находим точку пересечения прямых. Для этого надо вспомнить, что что для вершин P и Q, либо абсциссы, либо ординаты равны. Если точка пересечения лежит на стороне прямоугольника и не совпадает с P и Q, то выводим на новой строке "YES"и переходим к следующему предмету.

Если не получили ответ "YES"по пунктам I – III, то это означает, пересечения предмета со сторонами треугольника нет.

Круг. Круглый предмет будет пересекаться с треугольником, если:
1) либо центр лежит внутри или на границах треугольника;
2) либо часть треугольника, т.е. хотя бы одна из вершин, лежит внутри круга;
3) либо расстояние от центра окружности до со сторон треугольника меньше радиуса.

Задача 4. Координаты клада

Решение 1.
Предподсчитаем количество делителей у чисел на интервале от 1 до n. Для этого переберем все возможные делители x от 1 до n, и будем увеличивать количество делителей у чисел x, $2x$, $3x$ ... на 1. После предподсчёта для каждого вводимого числа будем проверять количество делителей у его индекса.

Решение 2.
С помощью решета Эратосфена найдем простые числа от 1 до n. Заметим, что 2 делителя имеют простые числа, 3 делителя имеют квадраты простых чисел, 4 делителя — произведения двух простых чисел и кубы простых чисел. Зная простые числа, найдем все числа с тремя и четырьмя делителями. После предподсчёта для каждого вводимого числа будем смотреть к какой категории относится его индекс.